Resposta da questão 1: [C]

$$N = 2^{48} - 1 = \left(2^{24} - 1\right)\cdot\left(2^{24} + 1\right) = \left(2^{12} - 1\right)\cdot\left(2^{12} + 1\right)\cdot\left(2^{24} + 1\right) = \left(2^{6} - 1\right)\cdot\left(2^{6} + 1\right)\cdot\left(2^{12} + 1\right)\cdot\left(2^{24} + 1\right)$$

$$N = 2^{48} - 1 = \left(2^{3} - 1\right)\cdot\left(2^{3} + 1\right)\cdot\left(2^{6} + 1\right)\cdot\left(2^{12} + 1\right)\cdot\left(2^{24} + 1\right)$$

$$N = (7)\cdot(9)\cdot(65)\cdot\left(2^{12} + 1\right)\cdot\left(2^{24} + 1\right)$$

Logo, pode-se concluir que o número N não é primo (pois é divisível por 7, 9 e 65, pelo menos), não é par (pois é resultado de multiplicações de números ímpares), é múltiplo de $2^{24} + 1$, é divisível por 9 e é múltiplo de 7.

Resposta da questão 2: [B]

$$\frac{(x+y)^2 - 4xy}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - 4xy}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x-y)^2}{(x+y)\cdot(x-y)} = \frac{(x-y)}{(x+y)}$$

Resposta da questão 3: [B]

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab\cdot(a+b)$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(x + \frac{1}{x}\right) \to \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\cdot\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Mas, $x + \frac{1}{x} = 3 \to (3)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\cdot(3) \to x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$

Resposta da questão 4: [D]

Lembrando que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, temos

$$M = \frac{(3^2+5^2)^2 - (3^2-5^2)^2}{(3^2\cdot 5^2)^2} = \frac{(3^2+5^2+3^2-5^2)(3^2+5^2-3^2+5^2)}{3^4\cdot 5^4} = \frac{2\cdot 3^2\cdot 2\cdot 5^2}{3^4\cdot 5^4} = \frac{4}{225}.$$

Resposta da questão 5: [A]

$$u = \frac{2017^2 - 1}{2016^2} = \frac{(2017+1)\cdot(2017-1)}{2016\cdot 2016} = \frac{2018}{2016}$$ então, $1 < \frac{2018}{2016} < 2 \Rightarrow 1 < u < 2.$

Resposta da questão 6: [A]

$$x - \frac{1}{x} = 13$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 13^2$$

$$x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 169$$

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 169$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 171$$

Resposta da questão 7: [D]

Se $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$, com $x > 0$, então $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 14 + 2 = 16.$

Daí, $x + \frac{1}{x} = 4$ e, portanto, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^5 = 4^5 = 2^{10}.$

Resposta da questão 8: [C]

$$x^2 = \left(\sqrt{32+10\sqrt{7}} + \sqrt{32+10\sqrt{7}}\right)^2$$

$$x^2 = 32+10\sqrt{7}+2.\sqrt{\left(\sqrt{32+10\sqrt{7}}\right).\left(\sqrt{32-10\sqrt{7}}\right)}+32-10\sqrt{7}$$

$$x^2 = 100$$

$$x = 10$$

Resposta da questão 9: [A]

$$E = p^3 + p^2q + q^3 + pq^2$$

$$E = p^2(p+q) + q^2(p+q)$$

$$E = (p^2+q^2).(p+q)$$

$$E = ((p+q)^2 - 2pq).(p+q)$$

$$E = (4^2 - 2.5).4$$

$$E = (16-10).4$$

$$\boxed{E = 24}$$

Resposta da questão 10: [C]

Resposta da questão 11: [A]

$$y = \frac{x^3-2^3}{x^2+2x+4} = \frac{(x-2).\cancel{(x^2+2x+4)}}{\cancel{(x^2+2x+4)}} = x-2 = \sqrt{2}-2$$

Resposta da questão 12: [E]

$$*N = 2002^2.2000 - 2000.1998^2$$

$$*N = 2000.(2002^2 - 1998^2) \rightarrow$$

$$N = 2000.(2002+1998).(2002-1998) \rightarrow$$

$$N = 2000.4000.4 \rightarrow N = 32000000 \rightarrow \boxed{N = 32.10^6}$$

Resposta da questão 13: [C]

$$x^8 - 1 = (x^4-1).(x^4+1) = (x^2-1).(x^2+1).(x^4+1) = (x-1).(x+1).(x^2-1).(x^2+1).(x^4+1)$$

Resposta da questão 14: [E]

$$\frac{\cancel{(x+y)}.\cancel{(x-y)}.(x+y)^2}{\cancel{(x+y)}.\cancel{(x-y)}}$$

$\leftrightarrow$ $(x+y)^2 = (1,25 - 0,75)^2$ $\leftrightarrow$ $(0,50)^2 = 0,25$

Resposta da questão 15: [B]

$$\sqrt{\frac{2^{13}+2^{16}}{2^{15}}} = \sqrt{\frac{2^{13}(1+2^3)}{2^{13}.2^2}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Resposta da questão 16: [C]

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{\cancel{(a+b)}.(a+b)}{\cancel{(a+b)}.(a-b)} = \boxed{\frac{a+b}{a-b}}$$

Resposta da questão 17: [B]

$$*\frac{x}{y}=\frac{3}{5}\rightarrow x=\frac{3y}{5}$$

$$*y^2-x^2=144\rightarrow y^2-\frac{9y^2}{25}=144\rightarrow\frac{25y^2-9y^2}{25}=144\rightarrow$$

$$16y^2=144.25\rightarrow 4y=12.5\left\langle\begin{array}{l}\boxed{y=15}\\ \boxed{x=9}\end{array}\right.$$

$$x+y=15+9=\boxed{24}$$

Resposta da questão 18: [C]

Se $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\frac{10}{3}$, com $a>0$, então $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(\frac{10}{3}\right)^2\rightarrow a+a^{-1}=\frac{100}{9}-2\rightarrow a+a^{-1}=\frac{82}{9}$

Resposta da questão 19: [B]

$$\frac{a^4+a^3b-ab^3-b^4}{a^2-b^2}=\frac{a^3(a+b)-b^3(a+b)}{(a+b).(a-b)}=\frac{(a+b).(a^3-b^3)}{(a+b).(a-b)}=\frac{(a-b).(a^2+ab+b^2)}{(a-b)}=(a^2+ab+b^2)$$

Resposta da questão 20: [A]

$m^2 - n^2 = 17$

$(m + n).(m - n) = 17.1$

Como 17 é primo temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} m+n=17 \\ m-n=1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos m = 9 e n = 8.

Assim, 9.8 = 72.